



تست ۱ (۴)

نکته ۱ - شرط آنکه متغیر ویرانه‌ها یک ماتریس مربعی باشند، این آمارهای مقادیر

نکته ۲ - رویکردی اصلی ماتریس‌هاست که متعامد :

الف - $|A| = \pm 1$ (در مینور آنها، مثبت یا منفی ۱ است)

ب - هر دو سطرها و ستون از ماتریس به هم عمود هستند (نقطه داخلی آنها صفر شود)

ج - هر دو سطرها و ستون طول برابر یک دارند.

نتیجه نه‌ی صواب در شرط بالا فوق‌تر است.

تست ۲ (۲۵)

طبق تعریف می‌دانیم $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ است، پس داریم :

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{d}{dx}(\ln(\Gamma(x))) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \Rightarrow \psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} \\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) \end{cases}$$

$$A = \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x}$$

تست ۳ (۴)

نکته : سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ برای هر مقدار ممکن $x \in \mathbb{R}$ همگرا به مقدار $\frac{1}{2} \sin x$ است.

باید تبدیل عبارت حاصل ضرب تحت سگما به جمع، داریم :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \sin(na) \xrightarrow{\text{نقطه به جمع}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2} (\sin \frac{(n+1)a}{2} - \sin \frac{(n-1)a}{2})$$

که هر دو سری فوق با توجه به نکته اول همگرا (به ازای هر مقدار ممکن a) هستند.

تست ۴ بازه متعارف و تحت زدن تابع زوج قرار دارد، لذا داریم:

$$I = r \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \xrightarrow{\text{قضیه}} r \times r \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \rightarrow \text{کوی سلتا}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم صورت و منخ بخرج}} I = r \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\underbrace{\sec^2 \theta + \tan^2 \theta}_{1 + \tan^2 \theta}} = r \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\xrightarrow{\substack{t = \tan \theta \\ dt = \sec^2 \theta d\theta}} I = r \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + r^2 t^2} = \frac{r}{r} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\frac{1}{r} + t^2} = r \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r}}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{r}}} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow I = r \sqrt{r} \left(\underbrace{\tan^{-1} \infty}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\tan^{-1} 0}_0 \right) = r \sqrt{r}$$

تست ۵ برای سه حجم زدن سه کمان بین دو دایره. $(x, y, z) = 0$ روی ناحیه دایره‌ای $(x^2 + y^2 \leq 4)$ می‌سبیه کنیم. $Z = xy$ ، $\frac{1}{\lambda}$ ، $\frac{1}{\lambda}$

$$V = \iint_D \int_0^{xy} dz dA = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} xy dA \xrightarrow{\text{سبیه قطبی}} \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{4}} (r \cos \theta)(r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\Rightarrow V = \left(\int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{4}} r^3 dr \right) = \frac{16}{\lambda} = 4, 5$$

$\frac{\Gamma(1) \Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}$ $\frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{4}} = 1$

تست 7: استال خط مردها، ایا بیاری یک خم بسته C میسبته با هم یا نه؟ با کمک قضیه گرین، داریم:

(۲)

$$I = \iint_D (q_x - p_y) dA = \iint_D (\cancel{2xy} + 3 - \cancel{2xy} + 2y) dA$$

دافنه

$$\Rightarrow I = \iint_D (2y + 3) dA$$

حل با انتخاب تغییر متغیر
 $u = x - y$, $v = x + y$, $J = \frac{1}{2}$ (همه ۱۰)

$$I = \int_{-1}^3 \int_{-1}^2 (v - u + 3) \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \left(\frac{v^2}{2} - uv + 3v \right) \Big|_{-1}^2 du$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \left(\frac{8}{2} - 2u + 7 \right) - \left(\frac{1}{2} + u - 3 \right) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \left(\frac{11}{2} - 2u \right) du$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left(\frac{11}{2} (4) - 2 (4 - (-1)) \right) = \frac{1}{4} (22 - 10) = 3$$